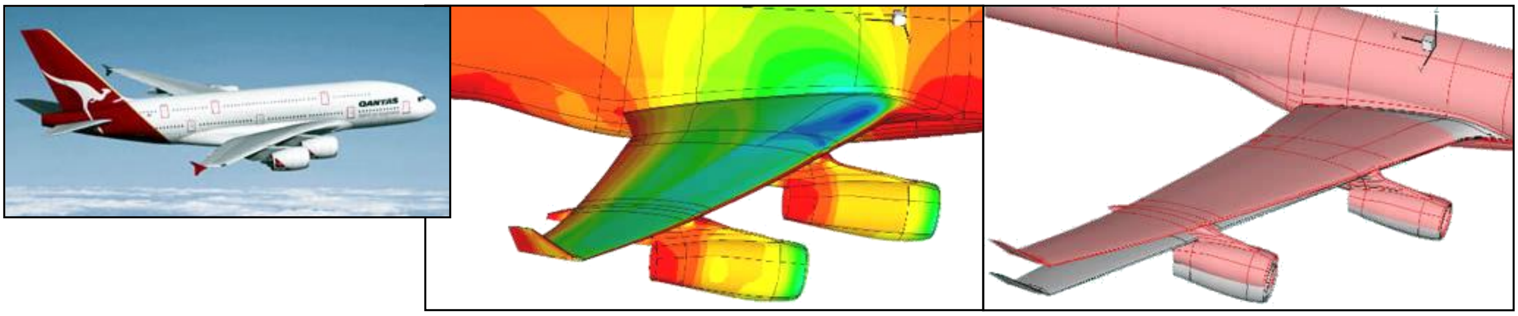
# A- Introduction à la RdM : le torseur de cohésion

## I- Objectifs de la Résistance des Matériaux

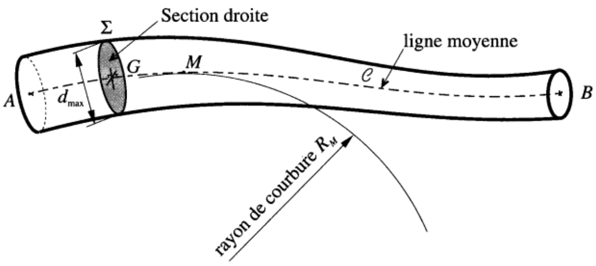
La résistance des matériaux est l'étude **de la résistance et de la déformation des solides** (arbres de transmission, bâtiments, fusées, . .). Cela permet donc de :

- *Déterminer les dimensions fonctionnelles de la pièce*
- *Choisir le matériau constituant la pièce*
- *Vérifier la résistance à la "casse" de la pièce* (Dépassement de la limite à la résistance élastique du matériau)
- *Vérifier la résistance à la "déformation" de la pièce*
- *Vérifier la résistance à la "fatigue" de la pièce* (Rupture après un certain nombre de cycles de déformation)
- *Optimiser le coût de la pièce par changement des formes, des dimensions, des matériaux, ...*



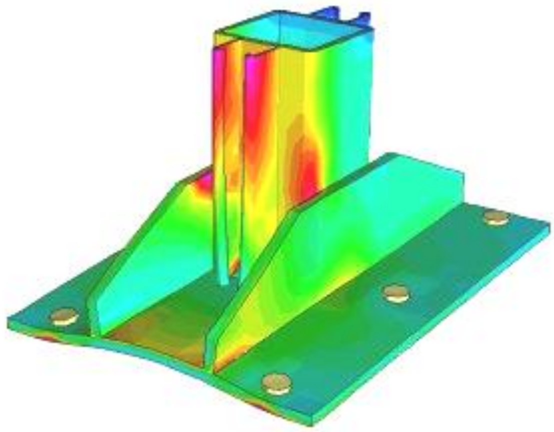
## II- Notion de poutre

Pour tous les calculs RDM, on utilise le modèle « Poutre » (solides dont une dimension est très supérieure aux deux autres).
Si la pièce à étudier ne peut pas être modélisée par une poutre, on utilise le calcul par éléments finis qui ne peut-être que logiciel.




**Les matériaux étudiés doivent être :**

- ***Isotropes*** *: on admet que les matériaux ont, en un même point, les mêmes propriétés mécaniques dans toutes les directions. Elle n'est pas vérifiée pour les matériaux tels que le bois, les matériaux composites...etc.*
- ***Homogènes*** *: On admet que les matériaux ont les mêmes caractéristiques (composition) en tout point.*
- ***Continus*** *: pas de fissure, pas de creux ...*

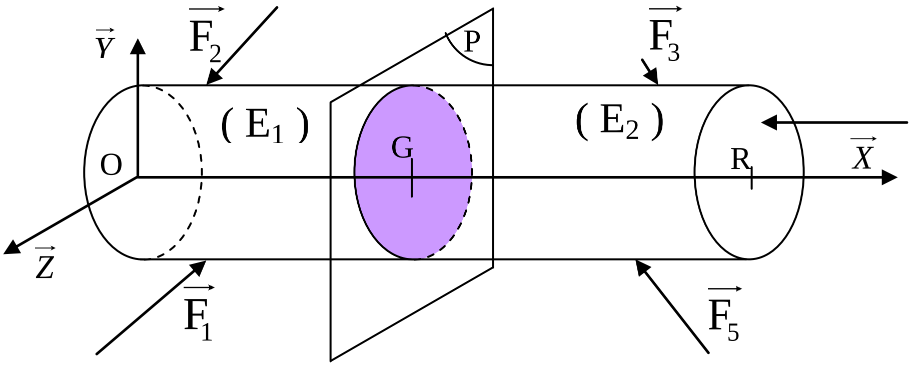


## III- Torseur de cohésion

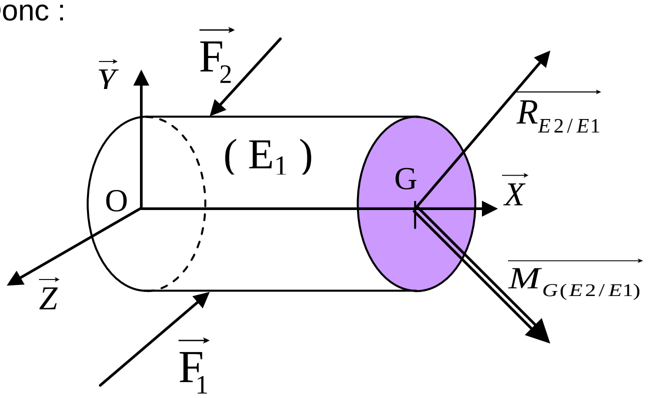
### III.1 Définition

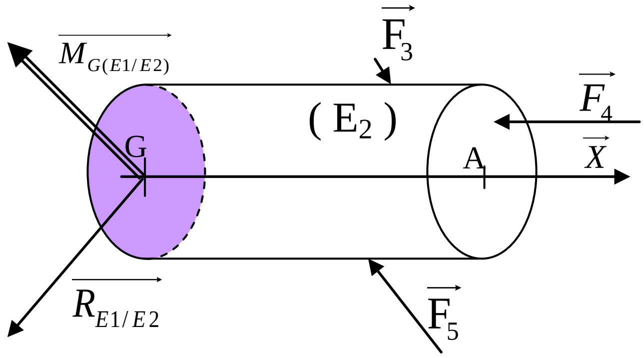
- La matière de la poutre reçoit des efforts extérieurs qui tendent à la déformer.
- La matière de la poutre engendre des efforts intérieurs qui tendent à s'opposer à cette déformation.
- Ces efforts intérieurs sont directement proportionnels aux efforts extérieurs.
- Ces efforts de la matière sur elle-même sont appelés **efforts de cohésion**, définis par le **torseur de cohésion.**

A partir d'un plan de coupe imaginaire (section S et barycentre G), on divise la poutre en deux tronçons fictifs ($E_1$ et $E_2$).




Donc :




Par convention, le torseur de cohésion :

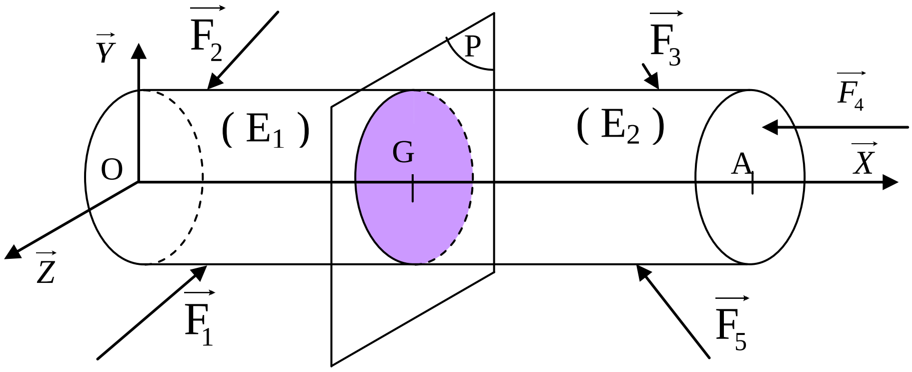
$$\boxed{{}_{G}\{\mathfrak{T}_{coh}\} = {}_{G}\{\mathfrak{T}_{G(E2/E1)}\}}$$

$${}_{G}\{\mathfrak{T}_{G(E1/E2)}\} = -\,{}_{G}\{\mathfrak{T}_{coh}\}$$

<u>Remarque :</u> Le torseur de cohésion sera défini en G tout le long de la ligne moyenne et l'étude se fait dans le sens des $\vec{X}$ croissants donc :

- $E_1$ est le tronçon qui croit au cour de l'étude.
- $E_2$ est le tronçon qui décroît au cours de l'étude.

### III.2 Eléments de calcul pour définir le torseur de cohésion




Le repère $\mathbb{R}$ tel que :
- O, origine à gauche
- O $\vec{x}$ confondu avec la ligne moyenne

S : Section de la poutre

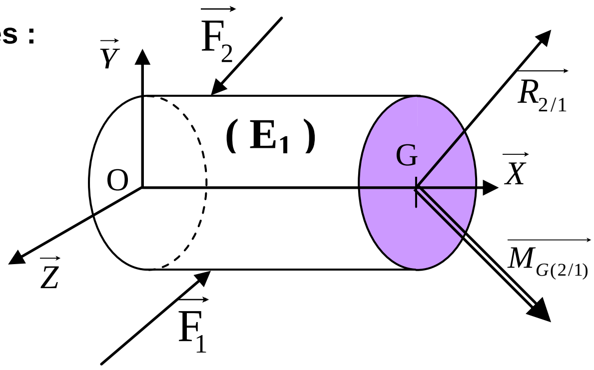
Avec $\overrightarrow{OG} = \begin{vmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$

### III.3 Principe de calcul

**La poutre E est en équilibre donc lorsque l'on pratique la coupure , on a :**
**Le tronçon $E_1$ en équilibre.**
Le tronçon $E_2$ en équilibre.

*Par conséquent, on peut appliquer le PFS à chaque tronçon.*

**Isolement de $E_1$. Bilan des actions mécaniques extérieures :**




- Le torseur des A.M. du milieu extérieur $\overline{E_1}$ sur $E_1$.

$${}_{G}\left\{\mathfrak{T}_{\overline{E_1}\to E_1}\right\} = {}_{G}\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{R_{(\overline{E_1}\to E_1)}} \\ \overrightarrow{M_{G(\overline{E_1}\to E_1)}}\end{matrix}\right\}_R$$

avec $\begin{cases}\overrightarrow{R_{(\overline{E_1}\to E_1)}} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_1} + \ldots + \overrightarrow{F_n} \\ \overrightarrow{M_{G(\overline{E_1}\to E_1)}} = \overrightarrow{M_{G\,\overrightarrow{F_1}}} + \ldots \overrightarrow{M_{G\,\overrightarrow{F_n}}}\end{cases}$

- Le torseur des A.M. de cohésion : A.M. de E2 $\rightarrow$ $E_1$ au travers de la section S.

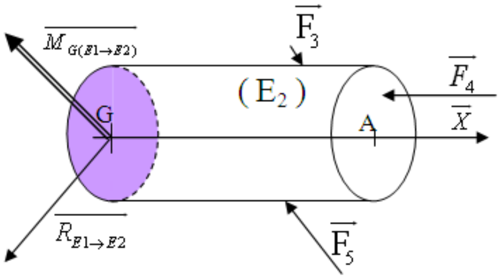
$${}_{G}\left\{\mathfrak{T}_{coh}\right\} = {}_{G}\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{R_G} \\ \overrightarrow{M_G}\end{matrix}\right\}_R$$

Appliquons le PFS à $E_1$ :

$${}_{G}\left\{\mathfrak{T}_{\overline{E_1}\to E_1}\right\}_R + {}_{G}\left\{\mathfrak{T}_{coh}\right\}_R = \{0\} \quad \text{donc} \quad \boxed{{}_{G}\left\{\mathfrak{T}_{coh}\right\}_R = -\,{}_{G}\left\{\mathfrak{T}_{\overline{E_1}\to E_1}\right\}_R}$$

On dit que le torseur de cohésion est égal à "**moins"** le torseur des A.M. $\overline{E_1} \rightarrow E_1$ à **gauche** de la section S.

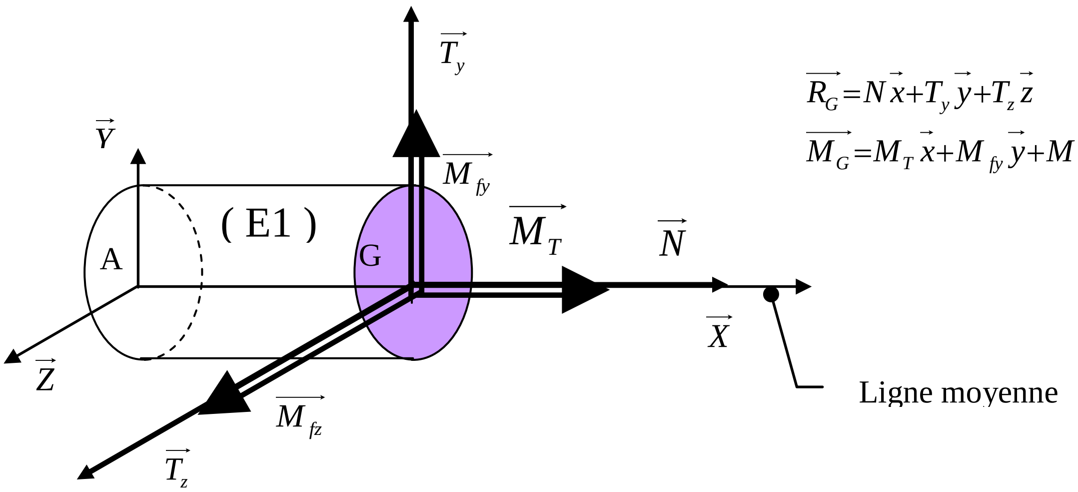
**2ème Méthode :** Isolement de $E_2$




$$\left\{\mathfrak{I}_{coh}\right\}_G^R = + \left\{\mathfrak{I}_{\overline{E_2}\to E_2}\right\}_G^R$$

Le torseur de cohésion est égal à "**plus**" le torseur des A.M. $\overline{E_2} \to E_2$ à **droite** de la section S.

### III.4 Composantes des efforts intérieurs




$$\overrightarrow{R_G} = N\vec{x} + T_y\vec{y} + T_z\vec{z}$$
$$\overrightarrow{M_G} = M_T\vec{x} + M_{fy}\vec{y} + M_{fz}\vec{z}$$

$\overrightarrow{N}$ : **Effort normal**, porté par la ligne moyenne x ( $N = \overrightarrow{R_G}.\overrightarrow{X}$ ).

$\overrightarrow{T} = \overrightarrow{T_y} + \overrightarrow{T_z}$ : **effort tranchant**, perpendiculaire à la ligne moyenne.

$\overrightarrow{M_T}$ : **Moment ou couple de torsion**, porté par la ligne moyenne.

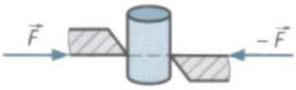
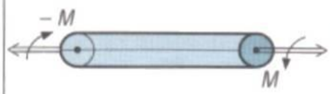
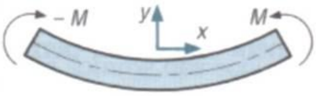
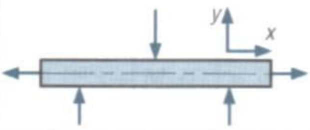
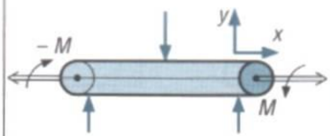
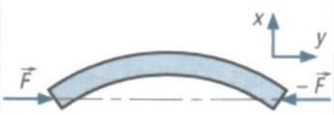
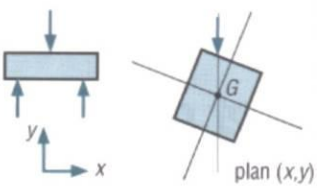
$\overrightarrow{M_f} = \overrightarrow{M_{fy}} + \overrightarrow{M_{fz}}$ : Moment fléchissant ou moment de flexion, perpendiculaire à la ligne moyenne.

Donc : $\boxed{\mathfrak{I}_G = \left\{\begin{matrix} N & M_T \\ T_y & M_{fy} \\ Tz & M_{fz} \end{matrix}\right\}_{G\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}}$

## IV- Sollicitations simples et composées

L'axe des $\vec{x}$ coïncide avec la ligne moyenne de la poutre et l'axe des $\vec{y}$ avec la verticale. Si une seule composante N, T, $M_T$ ou $M_f$ existe, alors que toutes les autres sont nulles, on dit que l'on a une **sollicitation simple**.

Si deux composantes au moins sont nulles, on dit que l'on a une **sollicitation composée**.

| Cas | Exemple | Composantes | | | | Observations |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $N$ | $T$ | $M_T$ | $M_f$ | |
| traction |  | $N$ | 0 | 0 | 0 | Sollicitations simples |
| cisaillement |  | 0 | $T$ | 0 | 0 | Sollicitations simples |
| torsion |  | 0 | 0 | $M_T$ | 0 | Sollicitations simples |
| flexion pure |  | 0 | 0 | 0 | $M_{fz}$ | Sollicitations simples |
| flexion simple |  | 0 | $T_y$ | 0 | $M_{fz}$ | Sollicitations composées |
| flexion + traction |  | $N$ | $T_y$ | 0 | $M_{fz}$ | Sollicitations composées |
| flexion + torsion |  | 0 | $T_y$ | $M_T$ | $M_{fz}$ | Sollicitations composées |
| flambage |  | $N$ | 0 | 0 | $M_{fz}$ | Sollicitations composées |
| flexion déviée |  | 0 | $T_y$<br>$T_z$ | 0 | $M_{fz}$<br>$M_{fy}$ | Sollicitations composées |

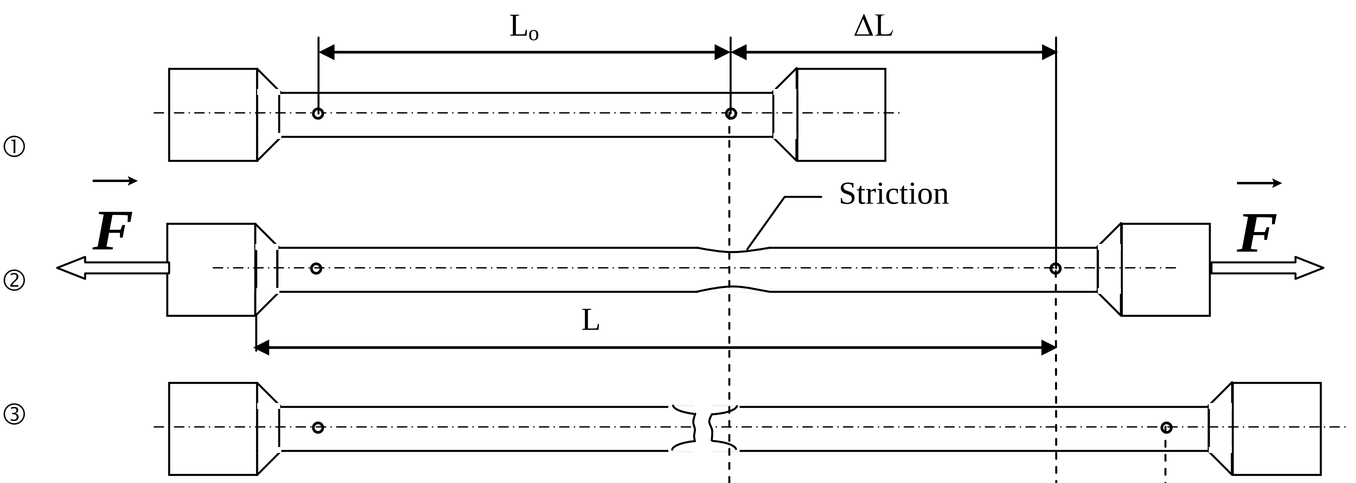
# B- TRACTION / COMPRESSION

## I- Définition :

Une pièce est soumise à la **traction** ou à la **compression** lorsqu'elle subit deux forces égales et directement opposées sur l'axe neutre de la pièce.

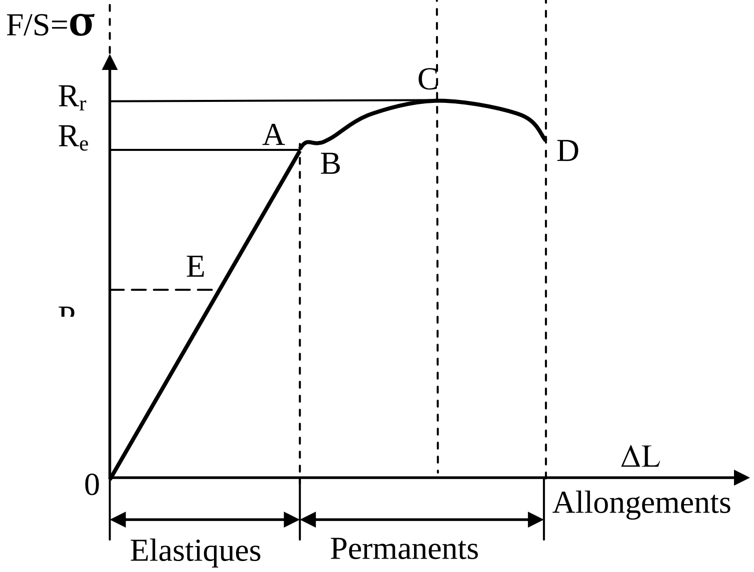
## II- Essai de traction :

L'éprouvette de longueur initiale $L_o$, de section S, subit une force croissante jusqu'à la rupture. Le graphe traduit la relation entre les allongements de l'éprouvette et la force F.

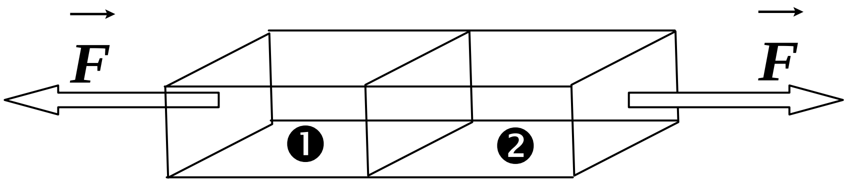



0A : Allongements élastiques
AB : Zone inutilisable
BC : Zone des allongements permanents (utilisé dans la visserie pré contrainte).
C : Point de striction
D : Point de rupture

$R_e$ : Résistance à la limite élastique
$R_r$ : Résistance à la rupture
$R_{pe}$ : Résistance pratique à l'extension
**σ** Est la contrainte prononcer SIGMA



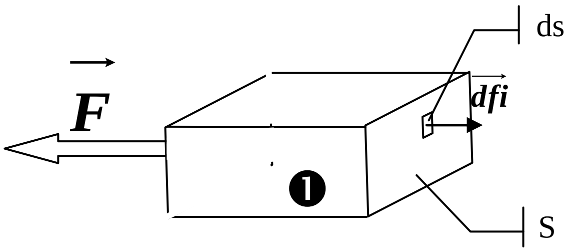
### III- Définition de la contrainte σ :




On isole le tronçon ❶ et on considère la section S.

On exprime la contrainte dans la section S par $\sigma$ :

$$\boxed{\sigma = \frac{F}{S}}$$




La **contrainte** est proportionnelle à la force F et inversement proportionnelle à la surface S.

### IV- Condition de résistance :

Pour dimensionner convenablement une pièce, il faut que la contrainte maximale qu'elle subit soit inférieure à la limite pratique élastique du matériau.

$$\boxed{\sigma < \mathrm{R}_{\mathrm{pe}}}$$

### V- Etude des déformations :

Sur le graphe de l'essai de traction OA représente la zone « élastique » qui traduit que la contrainte est proportionnelle aux déformations (courbe de la forme y=ax).
$L_0$ est la longueur initiale de l'éprouvette. Les expériences montrent que les allongements sont proportionnels aux longueurs initiales.
Cette propriété peut se traduire par la notion d'allongement relatif (ε) (se prononce "epsilon").

**Allongement relatif :** $\boxed{\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0}}$ ( $\Delta L$ : variation de longueur de l'éprouvette)

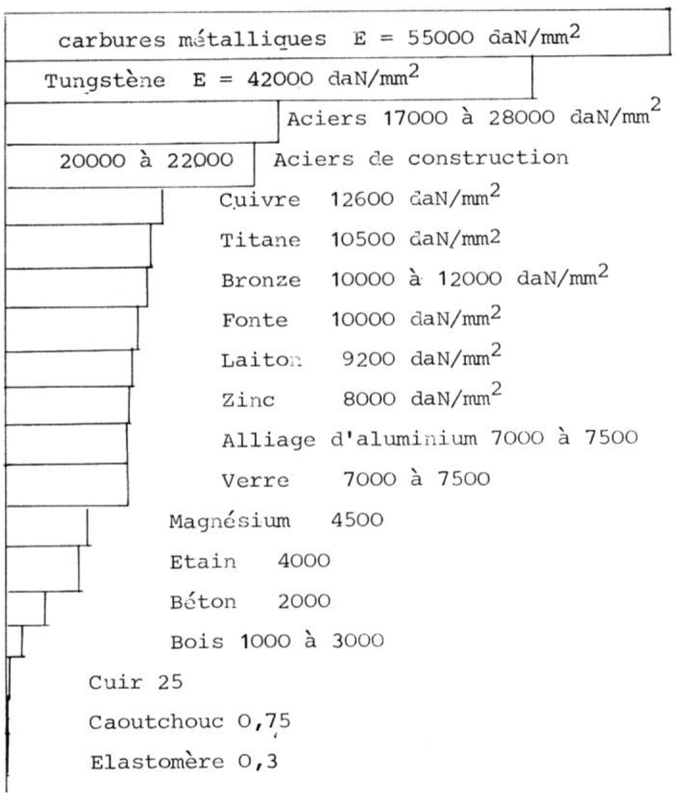
## VI- Relation entre la contrainte σ et l'allongement ε :

Cette relation est définie par la **loi de HOOKE** sous la forme :

$$\boxed{\sigma = E \,.\, \varepsilon}$$

E est appelé le **module de COULOMB** ou **module d'élasticité** longitudinal en dan/mm$^2$

QUELQUES EXEMPLES DE LA VALEUR DE E :

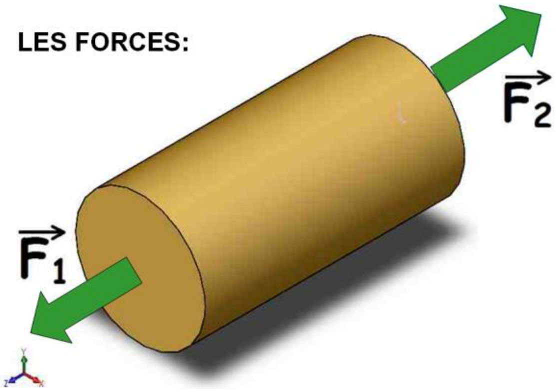



## VII- Conclusion sur la traction/compression :

**Loi de Hooke :** $\sigma = E \,.\, \varepsilon$

Avec

- La contrainte $\sigma = \dfrac{F}{S}$
- L'allongement relatif $\varepsilon = \dfrac{\Delta L}{L_0}$
- E : module d'élasticité




**Pour dimensionner une pièce, il faut veiller à ce que la contrainte maximale soit inférieure à la limite pratique élastique du matériau ($R_{pe}$).**